数理解析研究所講究録
484巻 1983年 31-41

Subring of an affine domain

阪大 理　小野田信春 (Nobuharu Onoda)
吉田憲一 (Ken-ichi Yoshida)

ここでは，ネーター的可換環Dを一つ定めておいて，D上有限生成な環Aと，Aの部分D－環Rについて，次の問題を考える。

Rはどんな条件のもとで，再びD上有限生成となり得るのか？

この問題の発端はHilbert第14問題との関連から出発したわけであるが，Hilbert 14問題は，御存知のように反例があり，否定的に解決を見たわけであるが，どのような十分条件があるかというと，あまり良くは知られていないわけです。現在は作用する群に条件を与えるという立場で研究を続けておられる人々がいますが，私達は，Aの部分環Rにいかなる条件があればよいかという立場をとり，一応Hilbert 14問題から少し離れて，アフィン環の部分環が再びアフィン環とな

するための特徴づけを行なって見ました。実際問題としては、Rがネーター的であることを求める事は、Rがアフィンである事を求める事とさして変わらぬ程難かしいのでしょうが、一つのD上有限生成となるための特徴づけを得たとおもうのです。

§1. 今までに知られている幾つかの結果

始めに、Hilbert 14問題をここで述べておきましょう。Dはこの場合体kで、Aはk上の多変数多項式環、LをAの商体の部分体として、$R = A \cap L$、このとき、Rはk上有限生成か？というものです。この形で述べたのは、O. Zariski先生だと聞いています。元来は、LがQ(A)のある群Gの不変部分体、従ってRがAの不変部分環になっている場合で、従って、Hilbert 14問題は不変式論との関係が密接にあり、実際は、可換環の出生の一つの源流でもあるとおもうのです。ところで、この問題は永田雅宜さん、そしてReesさんによって反例が作り上げられました。講演では、せっかくReesさんに聞いてもらっていながら、Reesさんの反例を紹介する事が出来ず、残念でした。気がきかなかったわけですが、さてこの反例を詳しく述べる事はここでの本筋ではありませんから省略しますが、Rが正規(ネーター的整閉)であっても

答えは No! でありますし，後との関連で今から言うのはなんですが，ネーター的でないが equi-dimension である例も存在します。

肯定的な話しに移りましょう。次は Zariski 先生の結果です。

R を正規環で，$\mathrm{tr.deg}_k R = 2$，そして R の高さ1の素イデアル $\mathfrak{p}$ がつねに $\mathrm{tr.deg}_k R/\mathfrak{p} = 1$ であれば，R は k 上有限生成。

次は永田－大塚さんの結果で，

D をネーター整域で，D 上の正規局所域（D 上有限生成かつ正規な環による局所化環）は解析的に既約（完備化環が整域）とする。A が正規で，$R = A \cap Q(R)$ となっていれば，今 $\mathrm{Spec}\, A \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R$ が上への写像のとき，R は D 上有限生成である。

もう一つ永田さんの結果，

R は A の部分環で，strongly submersive とすれば，R は D 上有限生成である。

§2. main theorem のための準備.

定義；R は D-algebra とする。$\mathfrak{P}$ を R の素イデアルで，$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap D$ とおく。$\mathfrak{P}$ が「次元公式」を満たすとは，

$$\mathrm{ht}\,\mathfrak{P} + \mathrm{tr.deg}_{k(\mathfrak{J})}\, k(\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}\,\mathfrak{J} + \mathrm{tr.deg}_D R$$

が成り立つことである，ここで，$k(\mathfrak{J})$ は $\mathfrak{J}$ の剰余体。

そして，D と R が次元公式を満たすとは，D の任意の素イデアル $\mathfrak{P}$ が次元公式を満たす事と定める。特に，D が体 k の場合は，k と R が次元公式を満たす事と，R が equi-dimensional である事は同じである。D 上有限生成な環と，次元公式については次が知られている。

命題 1．(i) D が locally quasi-unmixed であれば，D 上有限生成な環 A は D 上で次元公式を満たす。

(ii) T を local domain とする。今 T が k 上の locality によって支配されているならば，

$$\dim T + \mathrm{tr.deg}_k\, k(\mathfrak{m}) = \mathrm{tr.deg}_k\, T,$$ ここで $\mathfrak{m}$ は T の極大イデアル。従って，$\mathrm{Spec}\, R$ がある k－アフィン環の surjective image になっているならば，R は equi-dimensional である。

§ 3．main theorem

定理A. D は pseudo-geometric ring で次の条件 (C) を満たす。

(C) D 上の正規局所域は解析的に既約。

R を A の部分 D-環とする。このとき次は同値。

(1) R は D 上有限生成;

(2) R は局所的ネーター環で、R の極小イデアル P に対して、$(D/D\cap P)'$ と $(R/P)'$ は次元公式を満たす。ここで $(\ )'$ はそれぞれの商体の中での整閉包である。

上で、特に D が体 k であれば、

系 R は体 k を含む局所的ネーター整域で、今 R はある k-アフィン環に含まれるとする。このとき、R' が equi-dimensional であれば、R は k-アフィンである。

§ 4. Examples

始めに正規環で equi-dimensional でない例を示す。これは Heinzer に依る。

x, y を形式的巾級数環 $k[[t]]$ の2つの元として、order $\nu(x) = \nu(y)$ が、x と y は k 上代数的独立なもの

とする。 $V = k[[t]] \cap k(x, y)$ とおく，V は $k(x, y)$ の discrete な附値環である。 $R = V \cap k[x, \frac{1}{y}]$ とおくと，R は $k[x, \frac{1}{y}]$ の2次元正規的な部分環である。しかし R は equi-dimensional でない。それは，M を V の極大イデアルとして，$m = R \cap M$ とおけば，$ht\, m = 1$ で，m は R の極大イデアルである。R は無論アフィン環ではない。

次にこの R を利用して，ネーター的かつ equi-dimensional であるが，アフィンでないものを作ろう。これは先の系で，R' が equi-dimension という条件を R が equi-dimension という条件に弱められないという一つの例にもなっている。

$n = (x, \frac{1}{y} - 1)\, k[x, \frac{1}{y}] \cap R$ とおく。$ht\, n = 2$ で，n は R の極大イデアル，$\widetilde{R} := \{ f \in R \mid f(m) = f(n) \}$，とおく，ここで $f(m), f(n)$ はそれぞれ f の m, n での剰余類である。$\widetilde{R}$ は m, n を glueing して得られたものと言ってよい。このとき R は finite $\widetilde{R}$-module であるから $\widetilde{R}$ はネーター的であり，かつ $n \cap \widetilde{R} = \widetilde{n}$ とおくと，$ht\, \widetilde{n} = 2$ である。これから $\widetilde{R}$ は equi-dimensional，しかし $\widetilde{R}$ はアフィン環ではない。それは，次から出る。

補題2. D は pseudo-geometric ring とする。このとき，R の整閉包 R' が D 上有限生成であれば，R は，

D上有限生成である，又逆も成り立つ。

以上の例によって我々の得た定理Aがこの方向での結果としては，best possible であると思う。例として述べた環Rは Hilbert 14問題の反例にはなっていないが，Hilbert 14問題の設定の元でも，定理Aはこれ以上条件を弱める事は出来ないことがわかっている。

§5．証明の概略．

詳しい証明は［ONODA］を見て欲しい，D＝kの場合であれば［ONODA－YOSHIDA］が短く書かれている，前者は後者の相対的な結果を目ざして書いたものであるが，基本的なアイデアは後者を見てもらえればわかるとおもいます。

次の定義と，それに関する諸性質がこの証明の中心となるものである。

定義；　$A_D(R) = \{a \in R \mid a \neq 0,\ R_a$ は D上有限生成$\} \cup \{0\}$.

ここで R_a は $\{a^n \mid n > 0\}$ に関する商環。

命題3．(i)　$A_D(R)$ は R の根基イデアル。

(ii)　R がある D上有限生成な環の部分環に入るならば，$A_D(R)$ は non zero-divisor を含む，又逆も成立。

(iii) $A_D(R)$ が non-zero divisor を含むと仮定する。R の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して、$\mathfrak{P} \not\supset A_D(R)$ であることと、$R_{\mathfrak{P}}$ が D 上の locality であることは同値。従って、

(iv) R が D 上有限生成であるためには、R の極大イデアル M に対して、R_M が D 上の locality である事が必要充分。

これから、我々の問題は局所的な次の問題；$R_{\mathfrak{P}}$ はいつ D 上の locality になるのか？になった。これに対する、一つの答えとして、次の結果を得た。

補題 4. D は pseudo-geometric domain で条件 (C) を満たすとする。R を D を含む整域で、$A_D(R) \neq (0)$ とする。D', R' をそれぞれ D, R の整閉包として、R' の素イデアル P' が D' 上に次元公式を満たし、$R_{P' \cap R}$ がネーター的であれば、$R'_{P'}$ は D 上の locality。

この証明は Zariski's Main Theorem (Z. M. T) を使って得られるのである。参考のため、Z. M. T を述べておこう。

Zariski's Main Theorem (永田, Local Ring 37.4)

正規局所環 (R, m) は解析的既約と仮定する。K を R の商体とする。局所環 (R', m') が次の3つの条件を満たすとする。

(i) $R \leq R' \subset K$

(ii) R'/mR' は有限 R/m-加群

(iii) $\dim R' = \dim R$。

このとき、$R = R'$。

なお講演中 Rees さんから、上の形で述べた Z.M.T は Peskine に依って改良されたので、それを使ったら条件 (C) が除けるのではないかとの御指摘を受けましたが、Peskine の形での Z.M.T. は適用出来ぬことが分かりました。

以上の結果を使って、定理 A の証明の概略を述べましょう。まず R が整域の場合に証明すればよいことを言って、補題2から、R の整閉包 R' が D 上有限生成である事を示せればよい。そこで命題3から局所的な問題に変わり、R' の(極大)イデアル P' に対して、$R'_{P'}$ が D 上 locality であればよい、それは補題4によって、条件 (C) のもとでは次元公式を満たせば $R'_{P'}$ は D 上 locality と分かるので、よって我々の証明が

完成する。

最後にD上有限生成な環に支配されていれば，D上有限生成となるという次の結果を述べておこう。

定理B．Dを *pseudo-geometric domain* で条件(c)を満たすものとする。RはDを含む環で，$\mathcal{A}_D(R) \neq \{0\}$とする。今Rは局所ネーター的で，Rの整閉包$R'$が，$R'$の各極大イデアル$M'$に対して，$R'$上の *locality* Sで，$R'_{M'}$を支配し，D上次元公式を満足するものがあれば，RはD上有限生成。

これの系として，

系　Rは正規環とし，Rを含むD上有限生成な環Aがあって，今 $\mathrm{Spec}\,A \longrightarrow \mathrm{Spec}\,R$ が *surjective* であれば，RはD上有限生成である。

上の結果は次元公式を満たす環に支配されれば，次元公式を満たすといってよいとおもう，又系については，Rが正規である時；つねに $\mathcal{A}_D(R)\,A = A$ が成り立つのである。
これはアフィンに支配されれば，アフィンになるという事であろう。

直接的には次元公式が額をさせないという事で，次も成り立つ。

定理C. Dの条件は前と同じとする。ここでは更に，$0 \neq a \in D$ に対して，$\dim D[\frac{1}{a}] = \dim D$ を仮定する。このとき，Rが局所ネーター的で，R' が equi-dimension であれば，R は D上有限生成である。

REFERENCES

[1] M. Nagata, A theorem on finite generation of a ring, Nagoya Math. J. 27(1966), 193-205.

[2] M. Nagata and K. Otsuka, Some remarks on the 14th problem of Hilbert, J. Math. Kyoto Univ. 5(1965), 61-66.

[3] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, to appear.

[4] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, Hiroshima Math. J. 12(1982), 377-384.